เลขยกกำลัง

นิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ แล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}$$

จากบทนิยามข้างต้น	a^n	เรียกว่า	เลขยกกำลัง
	a	เรียกว่า	ฐาน
	n	เรียกว่า	เลขชี้กำลัง

รากที่ n ของจำนวนจริง

บทนิยาม ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

บทนิยาม ถ้ามีจำนวนจริงซึ่งเป็นรากที่ n ของ a แล้ว จำนวนจริงที่เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a เขียนแทนด้วย $\sqrt[n]{a}$ โดยที่

1. ถ้า $a > 0$ และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากที่ n ที่เป็นบวกของ a
2. ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่แล้ว $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากที่ n ที่เป็นลบของ a
3. ถ้า $a = 0$ แล้ว 0 จะเป็นรากที่ n ของ 0

ในกรณีที่ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว จะไม่มีจำนวนจริงใดที่เป็นรากที่ n ของ a

ตัวอย่างที่ 1

$3^4 = 81$ และ $(-3)^4 = 81$

ดังนั้น รากที่สี่ของ 81 คือ 3 และ −3

$(-3)^5 = -243$

ดังนั้น รากที่ห้าของ -243 คือ -3

$\left(\sqrt{7^2}\right) = 7$ และ $\left(-\sqrt{7^2}\right) = 7$

ดังนั้น รากที่สองของ 7 คือ $\sqrt{7}$ และ $-\sqrt{7}$

หมายเหตุ

จากบทนิยามจะเรียกจำนวนที่เขียนในรูป $\sqrt[n]{a}$ ว่ากรณ์และอ่านว่ากรณ์ที่ n ของ a

เช่น $\sqrt[5]{2}$ อ่านว่า กรณ์ที่ 5 ของ 2

ในกรณีที่ $n = 2$ จะเขียนแทนด้วย $\sqrt{a}$ เช่น กรณ์ที่ 2 ของ 4 เขียนได้เป็น $\sqrt{4}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา (1) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 9

(2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -64

วิธีทำ (1) เนื่องจาก $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$

ดังนั้นรากที่สองของ 9 คือ 3 และ -3

รากที่สองที่ไม่เป็นลบของ 9 เรียกว่า ค่าหลักของรากที่สองของ 9

เขียนแทนด้วย $\sqrt{9}$ ดังนั้น $\sqrt{9} = 3$

(2) เนื่องจาก $(-4)^3 = -64$

ดังนั้นรากที่สามของ - 64 คือ - 4

ค่าหลักของรากที่สามของ - 64

เขียนแทนด้วย $\sqrt[3]{-64}$ ดังนั้น $\sqrt[3]{-64} = -4$

สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1)

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n และ $b \neq 0$ แล้ว $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \geq 2$ แล้ว

   1) $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

2) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

5. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 แล้ว

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 แล้ว $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $x \geq 0$ จงหาค่าของ $\sqrt{x^{10}y^8}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{10}y^8} &= \sqrt{x^{10}} \cdot \sqrt{x^8} \\ &= \sqrt{(x^5)^2} \cdot \sqrt{(y^4)^2} \\ &= |x^5| \cdot |y^4| \\ &= x^5 \cdot y^4 \text{ (เนื่องจาก } x^5 \geq 0 \text{ และ } y^4 \geq 0)\end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะ

1 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

(1) รากที่ 2 ของ 169 เท่ากับ _____

ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 169 เท่ากับ _____

(2) รากที่ 3 ของ 216 เท่ากับ _____

ค่าหลักของรากที่ 3 ของ 216 เท่ากับ _____

(3) รากที่ 3 ของ -343 เท่ากับ _____

ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -343 เท่ากับ _____

(4) รากที่ 7 ของ -128 เท่ากับ _____

ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -128 เท่ากับ _____

(5) รากที่ 5 ของ 1,024 เท่ากับ _____

ค่าหลักของรากที่ 5 ของ 1,024 เท่ากับ _____

2 จงหาผลสำเร็จในแต่ละข้อต่อไปนี้ กำหนด $n > 2$ และ $n \in N$

(1) $\sqrt[4]{16}$ = _____

(2) $\sqrt[6]{729}$ = _____

(3) $\sqrt[3]{-64}$ = _____

(4) $\sqrt[5]{-243}$ = _____

(5) $\sqrt[4]{625}$ = _____

(6) $\sqrt{169-25}$ = _____

(7) $\sqrt[5]{3,125}$ = _____

(8) $\sqrt[3]{-1,331}$ = _____

(9) $\sqrt[2n]{8^{3n}}$ = _____

(10) $\sqrt[2n]{x^{4n}}$ = _____

แบบฝึกทักษะ

3 จงหาค่าของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ กำหนด $n > 3$ และ $n \in N$

(1) $\sqrt[3]{4} \cdot 4\sqrt[3]{2}$ = _____

(2) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64}$ = _____

(3) $2\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[4]{16}$ = _____

(4) $4\sqrt{4} \cdot 3\sqrt{4y}$ = _____

(5) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-27}$ = _____

(6) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{-25}$ = _____

(7) $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3}$ = _____

(8) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ = _____

(9) $\sqrt[n]{3^{n+3}} \cdot \sqrt[n]{3^{n-1}}$ = _____

(10) $\sqrt[3n]{x^2 y^3} \cdot \sqrt[2n]{x^{2n-2} \cdot y^{2n-3}}$ = _____

4 จงหาค่าของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ กำหนด $n > 3$ และ $n \in N$

(1) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ = _____

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{64}}$ = _____

(3) $\dfrac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$ = _____

(4) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{-2}}$ = _____

(5) $\dfrac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$ = _____

แบบฝึกทักษะ

(6) $\dfrac{\sqrt[4]{30}}{\sqrt[4]{2}}$ = _____

(7) $\dfrac{\sqrt[4]{x^5y^{10}}}{\sqrt[4]{243x^5}}$ = _____

(8) $\dfrac{\sqrt[3]{8x^3(y+z)}}{\sqrt[3]{y+z}}$ = _____

(9) $\dfrac{\sqrt[n]{3^{3n-1}}}{\sqrt[n]{3^{3n+1}}}$ = _____

(10) $\dfrac{\sqrt[3n]{4^{5n}}}{\sqrt[3n]{4^{5n}}}$ = _____

5 จงหาผลสำเร็จในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้สมบัติ

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

(1) $\sqrt[7]{(-3)^7}$ = _____

(2) $\sqrt[4]{(-3)^4}$ = _____

(3) $\sqrt[6]{(-7)^6}$ = _____

(4) $\sqrt[3]{(-12)^3 \times 8 \times 6^{-6}}$ = _____

(5) $\sqrt[5]{-8} \cdot \sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{81}$ = _____

(6) $\sqrt[3]{81x^3\ y^6\ z^6}$ = _____

(7) $\sqrt[3]{x^2-2xy^2+y^2}$ = _____

แบบฝึกทักษะ

(8) $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}$ = _____

(9) $\sqrt{10a^2b} \cdot \sqrt{2ab}$ = _____

(10) $\sqrt[4]{8ab^3c} \cdot \sqrt[4]{2a^4bc} \cdot \sqrt[4]{16a^3b^4c^2}$ = _____

(11) $\sqrt[6]{32x^4y^5z^3} \cdot \sqrt[6]{2x^2yz^3}$ = _____

(12) $\dfrac{\sqrt{625a^6b^5}}{\sqrt{5a^2b^3}}$ = _____

(13) $\dfrac{\sqrt[3]{240a^2}}{\sqrt[3]{7a^{-1}b^{-6}}}$ = _____

(14) $\dfrac{2\sqrt[5]{x^7y^{-2}}}{\sqrt[5]{x^{-3}y^{-7}}}$ = _____

(15) $\dfrac{\sqrt[3]{81x^4y^6z^2}}{\sqrt[3]{3xz^5}}$ = _____

การหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

การหาผลบวก หรือ **ผลต่างของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณ์** ทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงแจงระบบจำนวนจริง โดยเกณฑ์ที่สามารถนำมาหาผลบวกหรือผลต่างได้ต้องเป็นกรณฑ์ที่มีอันดับเดียวกันและจำนวนจริงภายใต้เครื่องหมายกรณ์เป็นจำนวนเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลสำเร็จของ $3x\sqrt{\frac{3}{x}}-2\sqrt{3x}+4\sqrt{\frac{x}{3}}$

วิธีทำ

$$3x\sqrt{\frac{3}{x}}-2\sqrt{3x}+4\sqrt{\frac{x}{3}} = 3x\sqrt{\frac{3\cdot x}{x\cdot x}}-2\sqrt{3x}+4\sqrt{\frac{x\cdot 3}{3\cdot 3}}$$

$$= \frac{3x}{x}\sqrt{3x}-2\sqrt{3x}+\frac{4}{3}\sqrt{3x}$$

$$= \left(3-2+\frac{4}{3}\right)\sqrt{3x}$$

$$= \frac{7}{3}\sqrt{3x}$$

การหาผลคูณหรือผลหารของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

การคูณและการหารกรณฑ์ใช้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{n}}$ เมื่อ $b \neq 0$

การหาผลคูณหรือผลหารของกรณฑ์จะทำได้เมื่ออันดับของกรณฑ์เท่ากัน ในกรณีที่อันดับของกรณฑ์ไม่กัน ต้องทำให้เท่ากันเสียก่อน โดยใช้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 แล้ว

1. $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ เมื่อ m เป็นจำนวนคี่
2. $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ เมื่อ m เป็นจำนวนคู่ และ $a \geq 0$

ตัวอย่างที่ 2 จงหารผลคูณของ $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[4]{54}$

วิธีทำ เปลี่ยนอันดับของกรณฑ์ให้เท่ากัน โดยเปลี่ยนกรณฑ์เป็นอันดับที่ 12 (เนื่องจาก ค.ร.น ของ 3 และ 4 เท่ากับ 12)

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[4]{54} &= \sqrt[3]{3^4}\cdot\sqrt[4]{9\cdot 2\cdot 3}\\
&= \sqrt[4\cdot 3]{3^{4\cdot 4}}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{9^3\cdot 2^3\cdot 3^3}\\
&= \sqrt[12]{3^{16}}\cdot\sqrt[12]{3^6\cdot 2^3\cdot 3^3}\\
&= \sqrt[12]{3^{16}}\cdot\sqrt[12]{3^9\cdot 2^3}\\
&= \sqrt[12]{3^{25}\cdot 2^3}\\
&= 3^2\sqrt[12]{3\cdot 2^3}\\
&= 9\sqrt[12]{24}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนเศษส่วน $\dfrac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}+12}$ ให้ไม่มีเครื่องหมายกรณฑ์ที่ตัวส่วน

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}+12} &= \frac{2\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})+12}\times\frac{(3+\sqrt{3})-12}{(3+\sqrt{3})-12}\\
&= \frac{2\sqrt{3}((3+\sqrt{3}))-\sqrt{12}}{(3+\sqrt{3})^2-(\sqrt{12})^2}\\
&= \frac{6\sqrt{3}+6-2\sqrt{36}}{9+6\sqrt{3}+3-12}\\
&= \frac{6\sqrt{3}+6-12}{6\sqrt{3}}\\
&= \frac{6\sqrt{3}-6}{6\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{18-6\sqrt{3}}{18}\\
&= \frac{6(3-\sqrt{3})}{18}\\
&= \frac{3-\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะ

1 จงหาผลบวกหรือผลต่างของจำนวนในแต่ละข้อในรูปอย่างง่าย กำหนดให้ตัวแปรทุกตัวและนิพจน์ทุกนิพจน์ที่ปรากฏในเครื่องหมายกรณฑ์แทนจำนวนจริงบวก

(1) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}$

(2) $\sqrt{25}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$

(3) $4\sqrt{63}+\sqrt{175}-8\sqrt{28}$

(4) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{432}$

(5) $6\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\sqrt{48}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{192}$

(7) $\sqrt{4x^7}+\sqrt{36x^3}-\sqrt{x}$

(8) $\sqrt[3]{16x^4}+\sqrt[3]{54x^4}-\sqrt[3]{-128x^4}$

(9) $\sqrt{63}+\sqrt{28}-\sqrt{\frac{1}{7}}$

(10) $\sqrt{48}+\sqrt[3]{16}+\sqrt{108}\sqrt[3]{54}$

(11) $\sqrt{147}-7\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

(12) $\sqrt{18a^3b^3}-a\sqrt{8ab^3}-\sqrt{50a^3b}$

แบบฝึกทักษะ

(13) $\sqrt{36x^3} - \sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{16x^5} + \sqrt{\frac{1}{x^2}}\sqrt{25x^7}$

(14) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

2 จงหาผลคูณของจำนวนในแต่ละข้อในรูปอย่างง่าย กำหนดให้ตัวแปรทุกตัวแทนจำนวนจริงบวก

(1) $\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{72}$

(2) $\sqrt[4]{9}.\sqrt{3}$

(3) $2\sqrt{3}(4\sqrt{8}-5\sqrt{27})$

(4) $\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{9})$

(5) $(5\sqrt{3}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

(6) $(6\sqrt{3}-5)(6\sqrt{3}+5)$

(7) $\sqrt{2}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{8}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$

แบบฝึกทักษะ

(8) $\sqrt[3n]{xy^2} \cdot \sqrt[3n]{x^{3n-1}\, y^{9n-2}}$

3 จงทำตัวส่วนของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ไม่มีเครื่องหมายกรณฑ์ปรากฏอยู่

(1) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{4}{2\sqrt{2}}$

(3) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

(4) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

แบบฝึกทักษะ

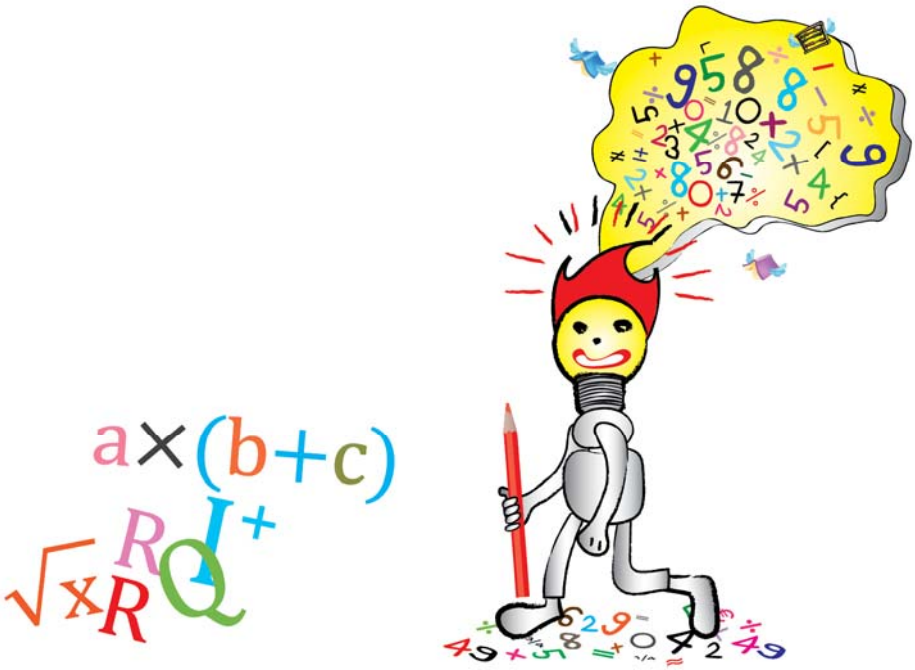
(5) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(6) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$

(7) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(8) $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{8}}$

แบบฝึกทักษะ

(9) $\dfrac{22}{3\sqrt{2}-\sqrt{7}} \div (\sqrt{18}+\sqrt{7})$

(10) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1} \div \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$